Підготовка до НМТ/ЗНО з математики

Формули скороченого множення, корінь, модуль

Формули скороченого множення

- *Зведення подібних членів*. Якщо кілька доданків мають однакові буквені частини, то їхні числові коефіцієнти додаються, а буквена частина зберігається.

$$9a^2b - 3a^2b - 4a^2b = (9 - 3 - 4)a^2b = 2a^2b$$

- *Винесення множника за дужки* здійснюється на основі розподільного закону і правил дій зі степенями.

$$4ax^2y + 3a^2bxy^2 - 2abx^2 = ax(4xy + 3aby^2 - 2bx).$$

- *Розкриття дужок* також здійснюється за допомогою розподільного закону. Необхідно пам'ятати, якщо множник перед дужками має від'ємний знак, то при їхньому розкритті змінюються знаки всіх доданків.

$$2mn^2(mx - 3yn^3 + 5) = 2m^2n^2x - 6mn^5y + 10mn^2;$$

$$-ab(3a - 2b + 4) = -3a^2b + 2ab^2 - 4ab.$$

Формули скороченого множення

- *Формули скороченого множення*:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2,$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3,$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

Формули скороченого множення

- *Формули скороченого множення*:

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = (a+(-b))(a+(-b)) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a-b)(a+b) = a^2 + (ab - ab) - b^2 = a^2 + (0) - b^2 = a^2 - b^2$

$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) =$

$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$

$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) = (a-b)(a^2 - 2ab + b^2) =$

$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$

$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3,$

$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3.$

Корінь

Коренем n-ого ступеня з дійсного числа a називається таке число, n-й степінь якого дорівнює a .

Арифметичним коренем n-ого ступеня з невід’ємного числа a називається таке невід’ємне число, n-й степінь якого дорівнює a.

$\sqrt[n]{a}$ — корінь, n — показник кореня, a — підкореневий вираз.

-1*(-1)=1, -1*(-1)*(-1)=-1

Корінь непарного степеня існує при будь-яких значеннях підкореневого виразу a ($a \in R$).

Корінь парного степеня існує лише для невід'ємного підкореневого виразу a ($a \geq 0$).

Корінь

Для $a > 0$ і $b > 0$ і натуральних чисел n, m, k виконуються наступні співвідношення:

1. $\sqrt[n]{a\,b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

3. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$

4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

5. $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$

6. $\sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}} = (\sqrt[n]{a^m})$

7. $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{якщо } n - \text{парне} \\ a & \text{якщо } n - \text{непарне} \end{cases}$

8. для довільних a і b, таких що $0 \le a \le b$ справедлива нерівність:
$\sqrt[n]{a} \le \sqrt[n]{b}$

Модуль

- Модуль — це відстань від початку координат до якогось числа на координатній прямій. Оскільки відстань не буває від'ємною, то і модуль завжди невід'ємний. Так, модуль числа 3 дорівнює 3, як і модуль числа −3 дорівнює 3.

$$|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$$

- Наприклад: $|2 - 5| = |-3| = 3$

$$|5 - 2| = |\ 3\ | = 3$$

- Правило розкриття модуля виглядає так:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0 \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases}$$

«Модуль розкривається зі знаком плюс, якщо підмодульний вираз більше або дорівнює нулю; модуль розкривається зі знаком мінус, якщо підмодульний вираз менший за нуль».

Модуль

Розкриття модуля, приклади:

1. Модуль числа -7

$x < 0$, оскільки $-7 < 0$, Тому використовуємо другу формулу: $|x| = -x$

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \geq 0 \\ -x, \text{ якщо } x < 0 \end{cases}$$

Підставимо замість x число −7: $|\overset{-7}{x}| = -\overset{-7}{x}$ $\quad |-7| = -(-7) = 7$

2. Модуль виразу $\sqrt{4} - 6$

Розпишемо $|\sqrt{4} - 6| = |2 - 6| = |-4|$,

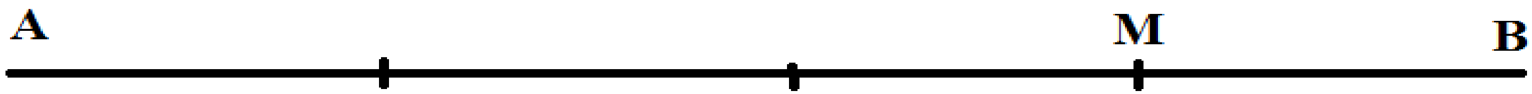
Згідно з попереднім (задача 1): $|\sqrt{4} - 6| = |2 - 6| = |-4| = -(-4) = 4$

- Задача 1. Якщо числа x і y задовольняють співвідношення $2y + 4 = x$, то $y =$

2y=x-4; y=(x-4)\2

- **Задача 2.**

На відрізку AB вибрано точку M так, що довжина відрізка AM утричі більша за довжину MB. Визначте довжину відрізка AB, якщо $MB = 12$ *см*.



AB=AM+MB,   AM=3*MB,   AB=3*MB+MB=3*12+12=48

- **Задача 3.**

Спростіть вираз $\frac{a^2+16}{a-4} - \frac{8a}{a-4}$.

$$\frac{a^2+16}{a-4} - \frac{8a}{a-4} = \frac{a^2-8a+16}{a-4} = \frac{(a-4)^2}{a-4} = a-4$$

- **Задача 4.**

Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $\sqrt{6-4x} = 4$.

$$\sqrt{6-4x} = 4; \quad 6-4x = 16; \quad -4x = 16-6; \quad x = \frac{10}{-4}; \quad x = -\frac{5}{2} = -2,5$$

- Задача 6.

Якщо $a < 2$, то $1 + |a - 2| =$

А	Б	В	Г	Д
$-a - 3$	$-a - 1$	$a - 1$	$a + 3$	$3 - a$

1-a+2=3-a

- Задача 7.

Спростіть вираз $0{,}8b^9 : (8b^3)$, де $b \neq 0$.

$$\frac{\mathbf{0.8*}\boldsymbol{b}^{\mathbf{9}}}{\mathbf{8*}\boldsymbol{b}^{\mathbf{3}}}\ |: \mathbf{8}\boldsymbol{b}^{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{0.1*}\boldsymbol{b}^{\mathbf{6}}}{\mathbf{1}} = \mathbf{0.1} * \boldsymbol{b}^{\mathbf{6}}$$

- Задача 8. Якщо ціна паркету (p) пов'язана із ціною деревини для його виробництва (d) співвідношенням $p = 5d + 8$, то $d =$

p-8=5*d, (p-8)\5= d

- Задача 9.

Яке з наведених чисел є розв'язком нерівності $|x| > 3$?

А	Б	В	Г	Д
3	1	0	–3	–8

|-8|=8   8>3

Задача 10

Знайти відповідність

1. √18-√32+√72	**А.** 2√2
2. √72+√50-√162	**Б.** 3√2
3. √200-√8-√50	**В.** 4√2
4. √128+√18-√98	**Г.** 5√2
	Д. 6√2

В цьому завданні слід розкласти підкореневі вирази на двійку і числа, з яких легко добути корені квадратні

$$\sqrt{18}-\sqrt{32}+\sqrt{72}=\sqrt{9\cdot 2}-\sqrt{16\cdot 2}+\sqrt{36\cdot 2}=$$
$$=3\sqrt{2}-4\sqrt{2}+6\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{72}+\sqrt{50}-\sqrt{162}=\sqrt{36\cdot 2}+\sqrt{25\cdot 2}-\sqrt{81\cdot 2}=$$
$$=6\sqrt{2}+5\sqrt{2}-9\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{200}-\sqrt{8}-\sqrt{50}=\sqrt{100\cdot 2}-\sqrt{4\cdot 2}-\sqrt{25\cdot 2}=$$
$$=10\sqrt{2}-2\sqrt{2}-5\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{128}+\sqrt{18}-\sqrt{98}=\sqrt{64\cdot 2}+\sqrt{9\cdot 2}-\sqrt{49\cdot 2}=$$
$$=8\sqrt{2}+3\sqrt{2}-7\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

Задача 11.

Якщо a<1, то |a-1|+|-7|=

Так як a<1, то a-1<0. Тоді |a-1|= -a+1 і маємо: |a-1|+|-7|= -a+1+7= -a+8.

Задача 12

Якщо a<-7 то = $\left|\dfrac{a^2-49}{a+7}\right|$

$\left|\dfrac{a^2-49}{a+7}\right| = \left|\dfrac{(a-7)(a+7)}{a+7}\right|$ =|a-7|=7-a.

- Задача 13. Перевірити справедливість рівності

$$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}=2.$$

Розглянемо рівність

$$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}.$$

Очевидно, що коли вона виконується, то виконується і задана рівність.

$$a=\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}},\quad b=2+\sqrt{3}.$$

Неважко переконатись, що a>0 і b>0. Якщо при цьому виконується рівність $a^2=b^2$, то a=b. Знаходимо

$$a^2=\frac{\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(19-8\sqrt{3}\right)}{\left(4-\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(19-8\sqrt{3}\right)}{19-8\sqrt{3}}=7+4\sqrt{3},$$

$$b^2=\left(2+\sqrt{3}\right)^2=4+4\sqrt{3}+3=7+4\sqrt{3}.$$

Оскільки $a^2=b^2$ то a=b, тобто задана рівність справедлива.

- Завдання 14
- Укажіть число, що є коренем рівняння $5^{x-2} = 25$

$$5^{x-2} = 25$$
$$5^{x-2} = 5^2$$
$$x-2 = 2$$
$$x = 4.$$

Завдання 15

Розв'яжіть рівняння $2^{2x} = \frac{1}{2^3}$

$2^{2x} = 2^{-3}$ (якщо число переміщується із знаменника в чисельник або навпаки, його степінь змінює свій знак)

$2x = -3$

$x = -3:2$

$x = -1,5.$

Задача 16. Знайти відповідність

1.	$\sqrt{(-1-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(4-\sqrt{5})^2}$	А. 1
2.	$\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(-1-\sqrt{5})^2}$	Б. √5
3.	$\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$	В. 4
4.	$\sqrt{(-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-4)^2}$	Г. 2√5
		Д. 5

В усіх чотирьох завданнях маємо корені квадратні з квадратів виразів, тому при розкритті отримаємо вираз за модулем.

Далі правильно розкриваємо модулі, для цього порівнюємо числа які містяться в різницях.

$$\sqrt{(-1-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(4-\sqrt{5})^2}=\left|-1-\sqrt{5}\right|+\left|4-\sqrt{5}\right|=$$

$$=-(-1-\sqrt{5})+(4-\sqrt{5})=1+\sqrt{5}+4-\sqrt{5}=5$$

$$\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(-1-\sqrt{5})^2}=\left|1-\sqrt{5}\right|+\left|-1-\sqrt{5}\right|=$$

$$=-(1-\sqrt{5})-(-1-\sqrt{5})=-1+\sqrt{5}+1+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}=\left|\sqrt{5}-2\right|+\left|\sqrt{5}-3\right|=$$

$$=(\sqrt{5}-2)-(\sqrt{5}-3)=\sqrt{5}-2-\sqrt{5}+3=1$$

$$\sqrt{(-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-4)^2}=\left|-\sqrt{5}\right|+\left|\sqrt{5}-4\right|=$$

$$=\sqrt{5}-(\sqrt{5}-4)=\sqrt{5}-\sqrt{5}+4=4$$

ХПІ підготовка

Онлайн сервіс НТУ "ХПІ" для вибору спеціальності, тренування до тестів та успішного вступу в університети.

http://training.kpi.kharkov.ua/

1885

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»