Підготовка до НМТ/ЗНО з математики

Алгебраїчні вирази логарифми

Теорія та практика

Логарифм

- Логарифмом додатного числа b з основою a ($a>0$, $a \neq 1$) називається показник степеня, до якого треба піднести a, щоб отримати b: $\boldsymbol{\log_a b}$

Наприклад: $2^5=32$, отже, $\log_2 32=5$.

– *Аргумент* і *основа* завжди повинні бути більшими за нуль. Це виходить з визначення ступеня з раціональним показником, з якого зводиться визначення логарифма.

– *Основа* повинна бути відмінною від одиниці, оскільки одиниця в будь-якому степеню все одно залишається одиницею.

Десятковий логарифм **- це логарифм за основою числа 10.**
Наприклад, $\log_{10}100 = 2$; $\log_{10}1000 = 3$; $\log_{10}0{,}01 = -2$.

Десяткові логарифми часто для стислості зображують знаком lg без вказівки основи: $\log_{10}N = \lg N$.
Всі десяткові логарифми мають спільні властивості всіх логарифмів

Логарифм **за основою** e (e - трансцендентне число, що дорівнює 2.718281828…) називається натуральним логарифмом. Натуральний логарифм числа x позначається lnx.

Логарифм

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$ (*логарифм за основою* a *від числа* b)

a - *основа логарифма* $(a > 0,\ a \neq 1)$ b - *під логарифмічний вираз* $(b > 0)$

ВЛАСТИВОСТІ ЛОГАРИФМІВ

1. $\log_a a = 1,$ $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a b^k = k \cdot \log_a b,$ $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$
3. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a},$ $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ $(\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b)$
4. $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c),$ $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$
5. $a^{\log_a b} = b,$ $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

Додаткові позначення: $\log_{10} a = \lg a$ - *десятковий логарифм*

$\log_e a = \ln a$ - *натуральний логарифм*

Логарифм

Свойства логарифмов.

$a^{\log_a b} = b$ $\quad$ $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

1) $\log_a 1 = 0.$

2) $\log_a a = 1.$

3) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

4) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

5.1) $\log_a x^p = p \cdot \log_a x.$

5.2) $\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b.$

6) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Следствия:

1) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

2) $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b.$

3) $\log_a b = \log_{a^\gamma} b^\gamma$

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

Логарифм

Log a	x									
x a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	0	1,0000	1,5850	2,0000	2,3219	2,5850	2,8074	3,0000	3,1699	3,3219
3	0	0,6309	1,0000	1,2619	1,4650	1,6309	1,7712	1,8928	2,0000	2,0959
4	0	0,5000	0,7925	1,0000	1,1610	1,2925	1,4037	1,5000	1,5850	1,6610
5	0	0,4307	0,6826	0,8614	1,0000	1,1133	1,2091	1,2920	1,3652	1,4307
6	0	0,3869	0,6131	0,7737	0,8982	1,0000	1,0860	1,1606	1,2263	1,2851
7	0	0,3562	0,5646	0,7124	0,8271	0,9208	1,0000	1,0686	1,1292	1,1833
8	0	0,3333	0,5283	0,6667	0,7740	0,8617	0,9358	1,0000	1,0566	1,1073
9	0	0,3155	0,5000	0,6309	0,7325	0,8155	0,8856	0,9464	1,0000	1,0480
10	0	0,3010	0,4771	0,6021	0,6990	0,7782	0,8451	0,9031	0,9542	1,0000

Задача 1. Обчислити $\log_a \sqrt{ab}$, якщо $\log_a b = 7$.

Використаємо властивості логарифмів

$$\log_a \sqrt{ab} = \frac{1}{2}\log_a(ab) = \frac{1}{2}(\log_a a + \log_a b) = \frac{1}{2}(1+7) = 4$$

Відповідь. $\log_a \sqrt{ab} = 4$

Задача 2. Обчислити $2\lg 0,1 + 3\ln e^2$

Використаємо властивості логарифмів і факт, що $\log_a a = 1$

$$2\lg 0,1 + 3\ln e^2 = 2\lg 10^{-1} + 3\cdot 2\ln e =$$
$$= -2\lg 10 + 6\ln e = -2 + 6 = 4$$

Відповідь. $2\lg 0,1 + 3\ln e^2 = 4$

Задача 3. Обчислити $\ln 2e^2 + \ln\frac{1}{2e}$

$$\ln 2e^2 + \ln\frac{1}{2e} = \ln\left(2e^2\cdot\frac{1}{2e}\right) = \ln e = 1$$

Відповідь. $\ln 2e^2 + \ln\frac{1}{2e} = 1$

- Приклад. Розв’язати рівняння $\log_{27} x = 2/3$

Знайдемо область допустимих значень (ОДЗ): $x > 0$

$\log_{27} x = 2/3 \quad <=> \quad 27^{2/3} = x$

$x = 27^{2/3} = (3^3)^{2/3} = 3^2 = 9$

X=9.

Алгебраїчні вирази

Алгебраїчні вирази – це математичні вирази, що складаються з чисел і змінних за допомогою знаків додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до раціонального степеня, добування кореня і за допомогою дужок.

Одночленом називається добуток кількох співмножників, що є числами або буквами. Окремі числа і букви також вважаються одночленами.
Наприклад, $2bxy$, $-3x^2z^5$, 6, y — одночлени.

Многочленом називається сума одночленів. Наприклад, $2bxy + 7x^2 + 3$ — многочлен.

Алгебраїчні вирази

Переставний закон:

$a + b = b + a$, $ab = ba$.

Сполучний закон:

$(a + b) + c = a + (b + c)$, $(ab)c = a(bc)$.

Розподільний закон:

$(a + b)c = ac + bc$.

При виконанні перетворень алгебраїчних виразів використовуються такі підходи (детально розглянуто 21.12.2022):

1. *Зведення подібних членів*

2. *Винесення множника за дужки*

3. *Розкриття дужок* також здійснюється за допомогою розподільного закону.

- Розв'язати рівняння $112\lg^2 x = 13 - 14\lg x$.

ОДЗ: $x > 0$.

Виконаємо заміну змінної $\lg x = t$:

$112t^2 = 13 - 14t$

$112t^2 + 14t - 13 = 0$

Знайдемо корені за теоремою Вієта

$t_1 = -4$

$t_2 = 1$

Повернемося до змінної x

$\lg x = -4$, $\lg x = 1$ => $x = 10^{-4}$ $x = 10$

$x_1 = 0.0001$ и $x_2 = 10$.

- Розв’язати рівняння $\log_2 (x - 3) = 4$

Знайдемо ОДЗ: $x - 3 > 0 \quad => \quad x > 3$

З визначення логарифма:

$x - 3 = 2^4$ (= 16); $\quad x = 16 + 3 = 19$

$x = 19$.

- Розв’язати рівняння $\log_x (2x^2 - 3x - 4) = 2$.

ОДЗ: $x > 0$,$x \neq 1$, $2x^2 - 3x - 4 > 0$.

$x^2 = 2x^2 - 3x - 4 \quad => \quad x^2 - 3x - 4 = 0$

За теоремою Вієта знайдемо корені рівняння $x^2 - 3x - 4 = 0$

$x_1 = 4$, $x_2 = -1$

Обираємо ті корені, що входять до ОДЗ:

$x_1 = 4$ – задовольняє умові ОДЗ:

$4 > 0$; $4 \neq 1$; $\quad 2\cdot4^2 - 3\cdot4 - 4 = 32 - 12 - 4 = 16 > 0$

$x_2 = -1$ - не задовольняє:

$-1 < 0$; $\; -1 \neq 1$; $\quad 2\cdot(-1)^2 - 3\cdot(-1) - 4 = 2 + 3 - 4 = 1 > 0$

$x = 4$.

- Розв’язати рівняння $x^{\lg x} = 100x$.

ОДЗ: $x > 0$.

Прологарифмуємо обидві частини рівняння за основою 10, та використаємо властивості логарифма:

$\lg x^{\lg x} = \lg 100{*}x$

$\lg x \cdot \lg x = \lg 100 - \lg x$

$\lg^2 x + \lg x - 2 = 0$

Заміна змінної $\lg x = t$:

$t^2 + t - 2 = 0$

За теоремою Вієта:

$t_1 = -2$

$t_2 = 1$

$\lg x = -2 \qquad \lg x = 1 \quad => \quad x = 10^{-2} \qquad x = 10$

$x_1 = 0.01$ и $x_2 = 10$.

- Розв'яжіть рівняння x-5+$\sqrt{2x^2-14x+13}$ = 0. ОДЗ: $\sqrt{2x^2-14x+13}$ >0

Перенесемо x-5 у праву частину і піднесемо обидві частини отриманого рівняння до другого степеня.

$\sqrt{2x^2-14x+13}$ = 5-x

$(2x^2-14x+13) = (5-x)^2$; $2x^2-14x+13 = 25-10x+x^2$

$2x^2-14x+13-25+10x-x^2 = 0$; $x^2-4x-12 = 0$.

$D = 4^2-4\cdot1\cdot(-12) = 16+48 = 64$.

$x_1 = \dfrac{4+\sqrt{64}}{2\cdot1} = \dfrac{4+8}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$. $x_2 = \dfrac{4-\sqrt{64}}{2\cdot1} = \dfrac{4-8}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$.

Перевіримо ці корені, підставивши їх в умову.

При x = 6 маємо 6-5+ $\sqrt{2\cdot6^2-14\cdot6+13}$ = 1+1 = 2≠0. Отже, x = 6 сторонній корінь.

При x = -2 маємо -2-5+$\sqrt{2\cdot(-2)^2-14\cdot(-2)+13}$ = -7+7 = 0. Отже, x = -2 є коренем рівняння.

1. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}$
2. $\sqrt{a\sqrt[4]{a\sqrt{a}}}$
3. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt[4]{a}}}$
4. $\sqrt[4]{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$

А. $a^{7/16}$
Б. $a^{9/16}$
В. $a^{11/16}$
Г. $a^{13/16}$
Д. $a^{15/16}$

Щоб спростити записи доцільно від коренів перейти до показникової форми запису виразів, застосовуючи необхідні для цього властивості показників

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}} = \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\cdot a^{\frac{1}{2}}}}} = \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}}} =$$

$$= \sqrt{a\sqrt{a\cdot(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{a\sqrt{a\cdot a^{\frac{3}{4}}}} = \sqrt{a\sqrt{a^{\frac{7}{4}}}} =$$

$$= \sqrt{a\cdot(a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{a\cdot a^{\frac{7}{8}}} = \sqrt{a^{\frac{15}{8}}} = (a^{\frac{15}{8}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{15}{16}}$$

$$\sqrt{a\sqrt[4]{a\sqrt{a}}} = \sqrt{a\sqrt[4]{a\cdot a^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{a\sqrt[4]{a^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{a\cdot(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{4}}} =$$

$$= \sqrt{a\cdot a^{\frac{3}{8}}} = \sqrt{a^{\frac{11}{8}}} = (a^{\frac{11}{8}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{11}{16}}$$

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt[4]{a}}} = \sqrt{a\sqrt{a\cdot a^{\frac{1}{4}}}} = \sqrt{a\sqrt{a^{\frac{5}{4}}}} = \sqrt{a\cdot(a^{\frac{5}{4}})^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \sqrt{a\cdot a^{\frac{5}{8}}} = \sqrt{a^{\frac{13}{8}}} = (a^{\frac{13}{8}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{13}{16}}$$

$$\sqrt[4]{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \sqrt[4]{a\sqrt{a\cdot a^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt[4]{a\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt[4]{a\cdot(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \sqrt[4]{a\cdot a^{\frac{3}{4}}} = \sqrt[4]{a^{\frac{7}{4}}} = (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{7}{16}}$$

Спростити вираз $\dfrac{\sqrt{a^2-4ab+4b^2}}{\sqrt{a^2+4ab+4b^2}}-\dfrac{8ab}{a^2-4b^2}+\dfrac{2b}{a-2b},0<a<2b.$

Розв'язання

$$\sqrt{a^2-4ab+4b^2}=\sqrt{(a-2b)^2}=|a-2b|=2b-a;$$
$$\sqrt{a^2+4ab+4b^2}=\sqrt{(a+2b)^2}=|a+2b|=a+2b;$$

Тоді

$$\frac{\sqrt{a^2-4ab+4b^2}}{\sqrt{a^2+4ab+4b^2}}-\frac{8ab}{a^2-4b^2}+\frac{2b}{a-2b}=\frac{2b-a}{a+2b}-\frac{8ab}{a^2-4b^2}+\frac{2b}{a-2b}=$$
$$=\frac{(2b-a)(a-2b)-8ab+2b(2b+a)}{a^2-4b^2}=\frac{-a^2+4ab-4b^2-8ab+2ab+4b^2}{a^2-4b^2}=$$
$$=\frac{-2ab-a^2}{a^2-4b^2}=\frac{-a(2b+a)}{(a+2b)(a-2b)}=\frac{-a}{a-2b}=\frac{a}{2b-a}.$$

Укажіть проміжок, якому належить число $\log_2 9$.

А	Б	В	Г	Д
(0; 1)	(1; 2)	(2; 3)	(3; 4)	(4; 5)

$$\boldsymbol{log_2 9 = log_2 3^2 = 2 * log_2 3 = 2 * 1,58 \ldots}$$

$\log_2 9$: $2^x = 9$; $2^3 = 8$; $2^4 = 16$; 8<9<16, тому (3; 4) - шуканий інтервал

Якому з наведених проміжків належить число $\log_2 \frac{1}{3}$?

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3)$	$(-3; -1)$	$(-1; 1)$	$(1; 3)$	$(3; +\infty)$

$\log_2 1 - \log_2 3 = -\log_2 3 = \log_2(1\backslash 3)$ метод не дав результату

Спробуємо знайти значення логарифму для сусідніх дробів, з яких легко отримати числове значення
$\log_2(1\backslash 4) = -2$; $\log_2(1\backslash 2) = -1$; (-2; -1) – знаходимо інтервал, до якого належить знайдений

Нехай m і n – довільні дійсні числа, a – довільне додатне число, $a \neq 1$. До кожного початку речення (1–4) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення		*Закінчення речення*	
1	Якщо $(a^m)^n = a^4$, то	А	$m + n = 4$.
2	Якщо $a^m \cdot a^n = a^4$, то	Б	$m - n = 4$.
3	Якщо $\sqrt[8]{a^m} = \sqrt{a^n}$, то	В	$mn = 4$.
4	Якщо $\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^4}$, то	Г	$m = 4n$.
		Д	$m = 8n$.

1-В,
2-А,
3-Г,
4-Б

ХПІ підготовка

Онлайн сервіс НТУ "ХПІ" для вибору спеціальності, тренування до тестів та успішного вступу в університети.

http://training.kpi.kharkov.ua/

1885

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»