Підготовка до НМТ/ЗНО з математики

Функції

Функції однієї змінної. Основні поняття.

- **Функція однієї змінної.** Якщо кожному числу x з деякої множини дійсних чисел X ставиться у відповідність за певним правилом єдине дійсне число y, то кажуть, що на множині X задана функція y=f(x).
- Змінна x називається незалежною змінною або аргументом;
- Множина X – областю визначення функції, позначається D(f);
- Змінна y називається залежною змінною, або значенням функції;
- Множина Y – областю значень функції, позначається E(f)

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

Способи задання функції

- а) **аналітичний спосіб**. Якщо функція задана формулою виду *y=f(x), де f(x) – математичний вираз*. Цей спосіб найбільш часто зустрічається на практиці.
- б) **табличний спосіб** полягає в тому, що функція задається таблицею, що містить значення аргументу і відповідні значення функції. Наприклад, таблиця логарифмів, гармонійні функції і т.д.

x	1	2	3	4
y	32	64	96	128

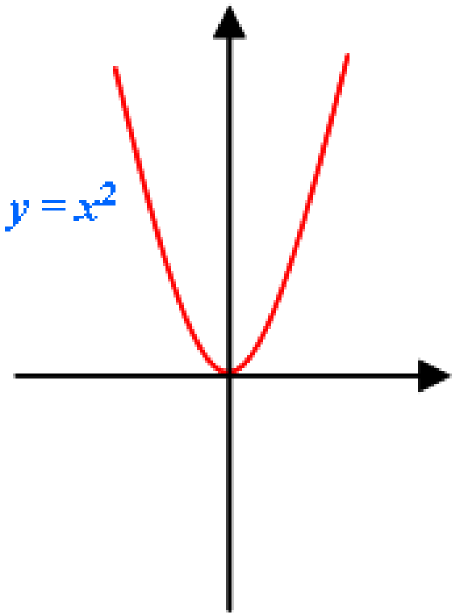
- в) **графічний спосіб** складається в зображенні графіка функції - множини точок площині, абсциси яких є значення аргументу, а ординати - відповідні їм значення функції.
- г) **словесний спосіб,** наприклад, функція Діріхле: у дорівнює 1, якщо х раціональне число, і 0, якщо ірраціональне.

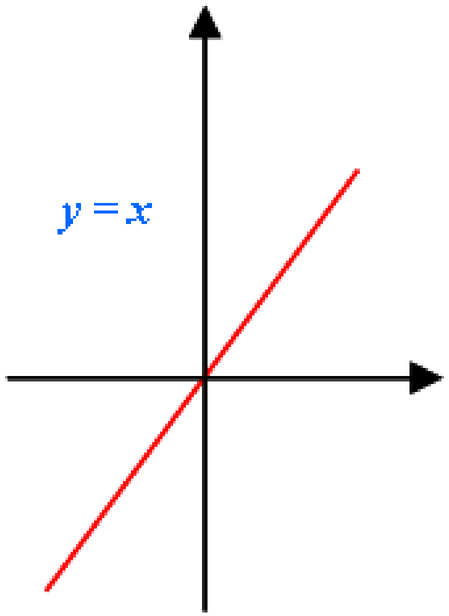
Властивості функції

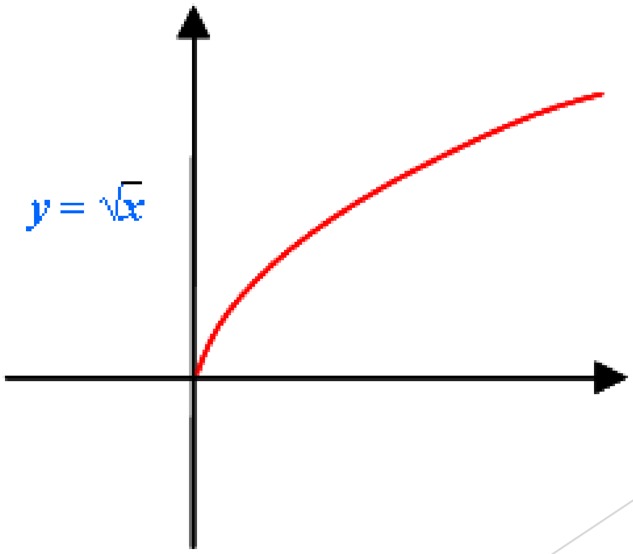
- 1. Парність, непарність.

Функція y = f(x) називається парною (непарною), якщо для будь-якого значення x із D(y) значення (-x) також належить D(y) і виконується рівність f(-x) = f(x) (f(-x) = -f(x) непарна). Графік парної функції симетричний відносно осі OY, непарної функції – відносно початку координат.

Якщо функція не є ні парною, ні непарною, то вона називається функцією загального вигляду.







Укажіть парну функцію.

А	Б	В	Г	Д
$y = 4^x$	$y = x$	$y = \sqrt{x}$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \lvert x \rvert$

Перевіримо парність $y(x)=4^x$, для від'ємних значень маємо $y(-x) = 4^{-x} = \frac{1}{4^x} \neq y(x)$, висновок, що функція $y(x)=4^x$ не є парною;

$y(x)=x$, тоді $y(-x)=-x \neq y(x)$ - не є парною;

$y(x)= \sqrt{x}$, тоді $y(-x) = \sqrt{-x} \neq y(x)$ не є парною;

$y(x)=tg(x)$, тоді $y(-x)=tg(-x)=-tg(x) \neq y(x)$ - не є парною;

$y(x)=|x|$, тоді $y(-x)=|-x|=x=y(x)$ - функція є парною.

Парна функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Які з наведених тверджень є правильними?

I. $f(-10) = -f(10)$.
II. $f(-6) = f(6)$.
III. Графік функції $y = f(x)$ симетричний відносно осі y.

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише II	лише I і III	лише II і III	лише III

Функція $f(x)$ - парна, а функція $g(x)$ - непарна. $f(7)=-11$, $g(5)=-2$.
Обчислити $2f(-7)-3g(-5)$.

Розв'язування: Оскільки функція $f(x)$ - парна, то $f(-x)=f(x)$, звідси $f(-7)=f(7)=-11$.
Оскільки функція $g(x)$ - непарна, то $g(-x)=-g(x)$, звідси $g(-5)=-g(5)=2$.
Обчислюємо значення виразу
$2f(-7)-3g(-5)=2\cdot(-11)-3\cdot 2=-22-6=-28$.

Властивості функції

- 2. Монотонність.

Функція y=f(x) називається:

•зростаючою на інтервалі (a,b), якщо $\forall x1,x2\in(a,b)$:

$$x1<x2 \Rightarrow f(x1)\leq f(x2);$$

•строго зростаючою на інтервалі (a,b), якщо $\forall x1,x2\in(a,b)$:

$$x1<x2 \Rightarrow f(x1)<f(x2);$$

•спадною на інтервалі (a,b), якщо $\forall x1,x2\in(a,b)$:

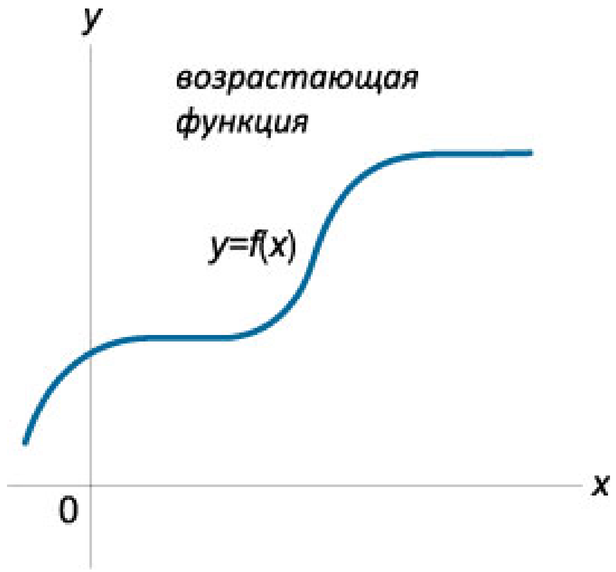
$$x1<x2 \Rightarrow f(x1)\geq f(x2);$$

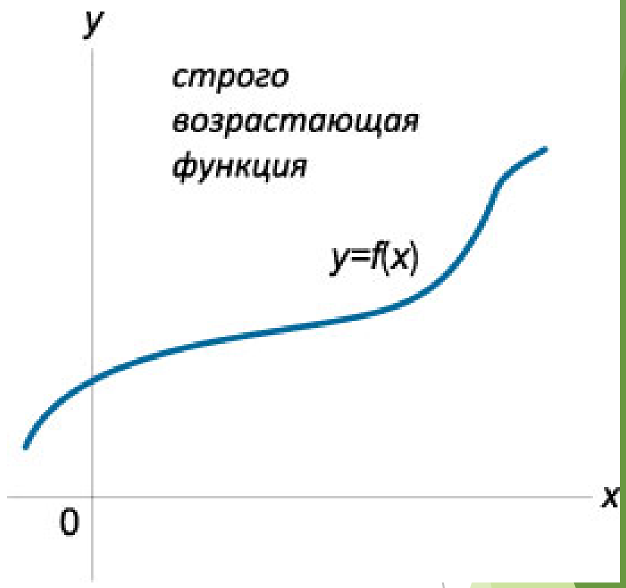
•строго спадною на інтервалі (a,b), якщо $\forall x1,x2\in(a,b)$:

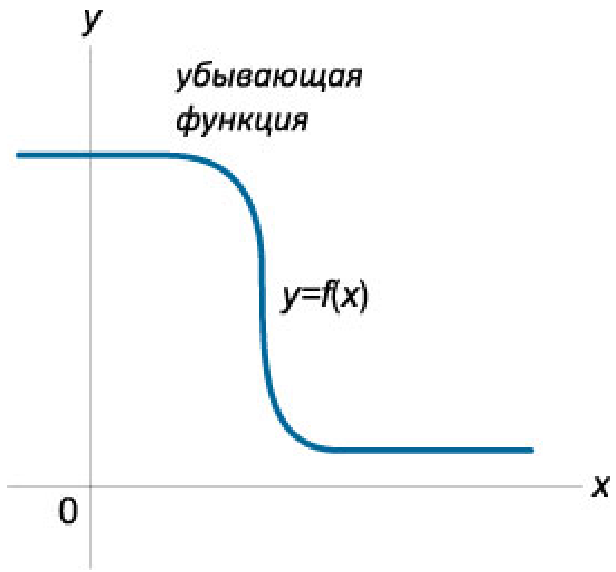
$$x1<x2 \Rightarrow f(x1)>f(x2)$$

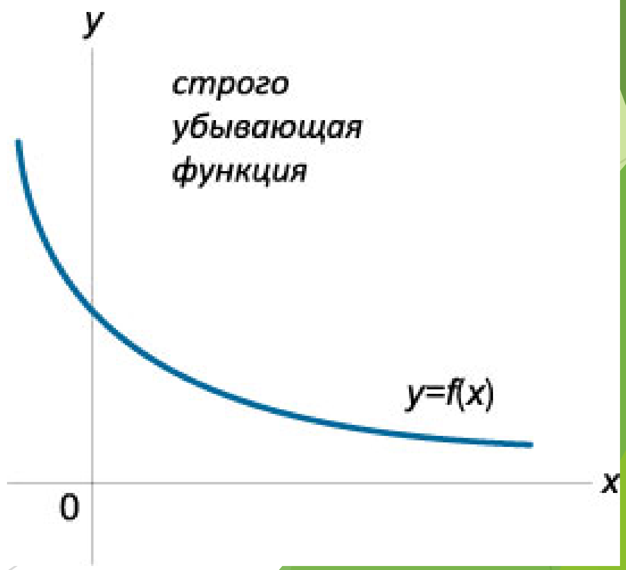
Монотонною називається функція, яка належить до одного з наведених типів.

Властивості функції



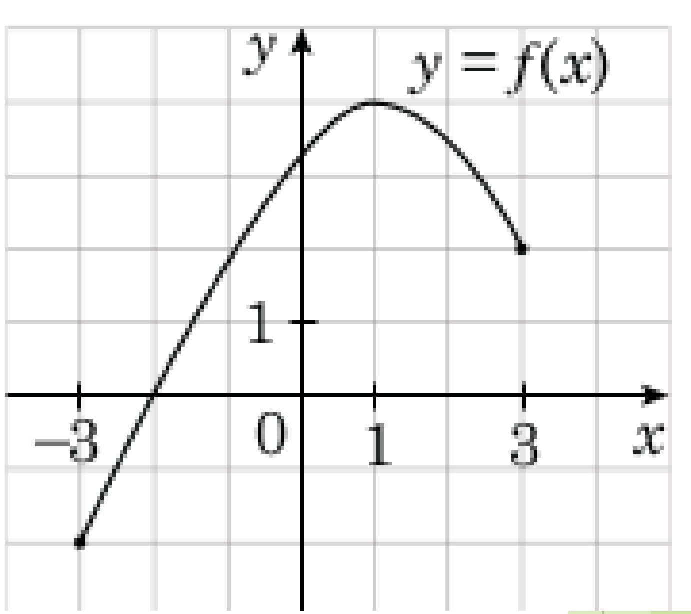






- На рисунку зображено графік функції y=f(x), визначеної на проміжку [-3;3]. На якому з наведених проміжків ця функція зростає.

- За малюнком графік зростає від початку до точки, у якої x=1. Отже, маємо проміжок [-3;1].

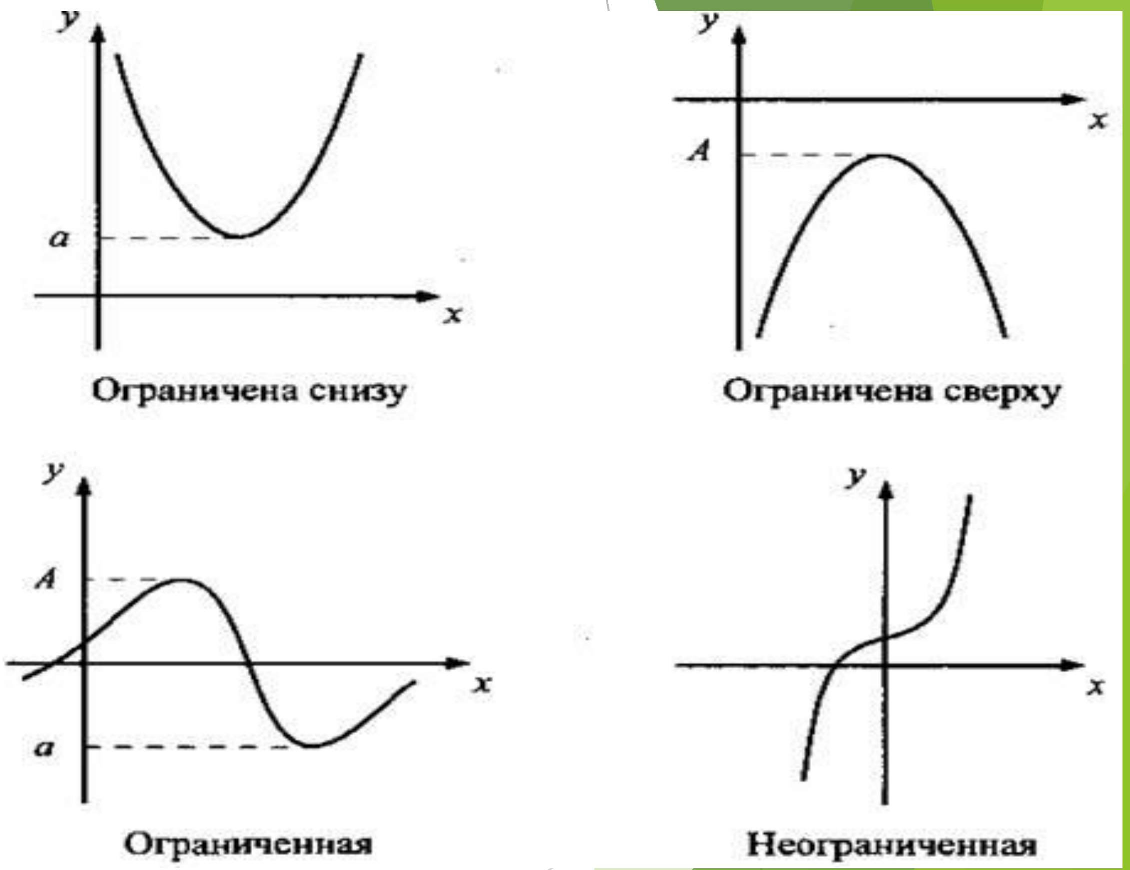


Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

Властивості функції

3. Обмеженість.

- Функція $y=f(x)$ називається обмеженою зверху (знизу), якщо існує таке число M (m), що для всіх x з області визначення цієї функції виконується нерівність $f(x)<M(f(x)>m)$.
- Обмежена зверху і знизу функція називається обмеженою. (Функція $y=f(x)$ називається обмеженою, якщо існує таке додатне число $M>0$, що для всіх x з області визначення цієї функції виконується нерівність $|f(x)|<M$)



Властивості функції

4. Періодичність.

- Функція $y=f(x)$ називається періодичною з періодом T, якщо для будь-якого x з області її визначення виконується рівність

$$f(x+T) = f(x), \quad (1)$$

де x+T теж належить області визначення функції.

- Періодом функції називається найменше додатне число T, при якому виконується (1).

Область визначення та область значень

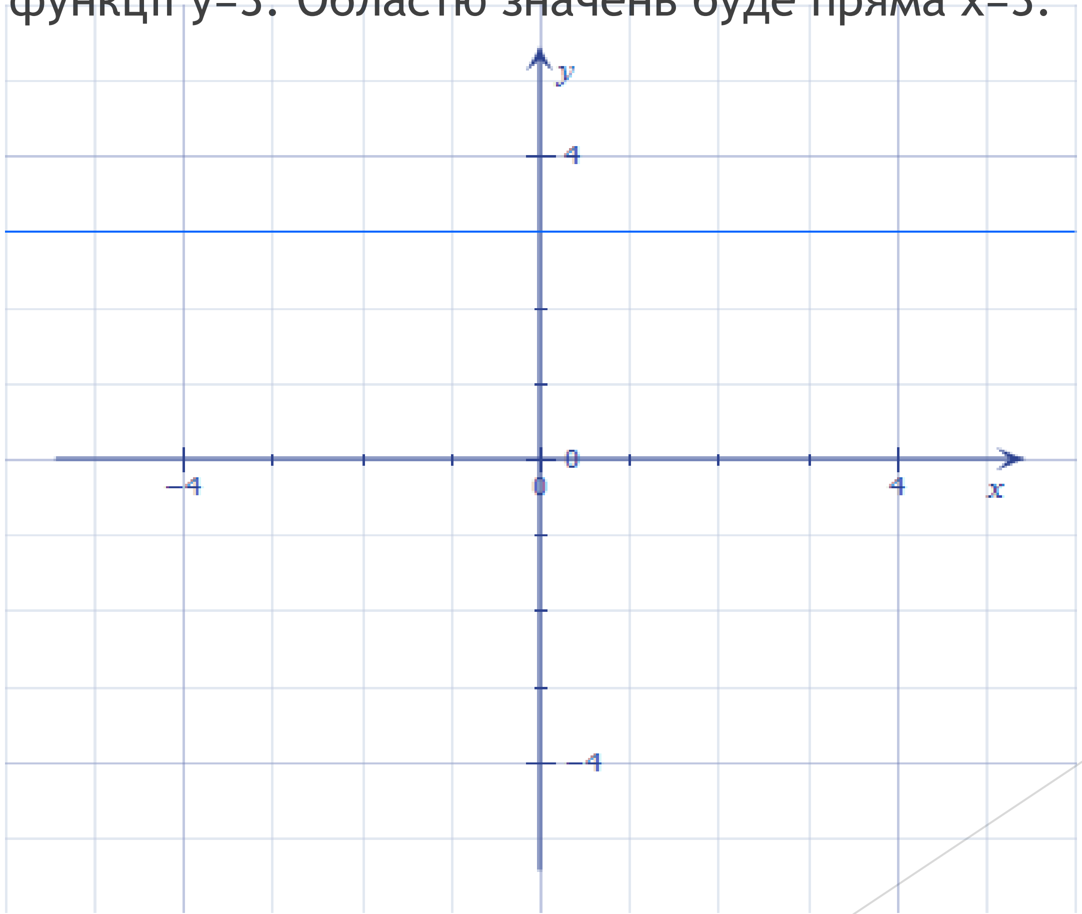
- Областю визначення функції (D) називають сукупність всіх допустимих значень аргумента (x) функції. Наприклад, для функції $y = \frac{2}{3-x}$ недопустимим є число 3: $y = \frac{2}{3-3} = \frac{2}{0}$, а на 0 ділити не можна.

Область визначення знаходиться наступним чином:

- З'ясувати, чи існують такі значення аргументу, при яких неможливо виконати дію у виразі, що задає функцію.
- Знайти ці особливі значення.
- Виключити їх з проміжку.
- Наприклад: вираз у знаменнику ніколи не дорівнює 0, вираз під знаком квадратного кореня не може бути від'ємним.

Область визначення та область значень

- Областю значень функції (E) називають сукупність усіх значень, яких може набувати функція.
- Наприклад. Візьмемо графік функції y=3. Областю значень буде пряма x=3.



Знайти область визначення функції . $y = \sqrt{5^{2x-3} - 1}$

Це і є умова на встановлення області визначення:
$5^{(2x-3)}-1 \geq 0$,
$5^{(2x-3)} \geq 1$,
$5^{(2x-3)} \geq 5^0$,
$2x-3 \geq 0$,
$2x \geq 3$,
звідси $x \geq 1{,}5$.

А	Б	В	Г	Д
$(1,5;+\infty)$	$[2;+\infty)$	$[1,5;+\infty)$	$[5;+\infty)$	$[3;+\infty)$

Нулі функції

- Нулями функції називають значення аргументу, при яких функція набуває значення нуль.
- Щоб знайти нулі функції, заданої формулою, потрібно праву частину прирівняти до нуля і розв’язати отримане рівняння.
- Приклад 1. y=3*x-5

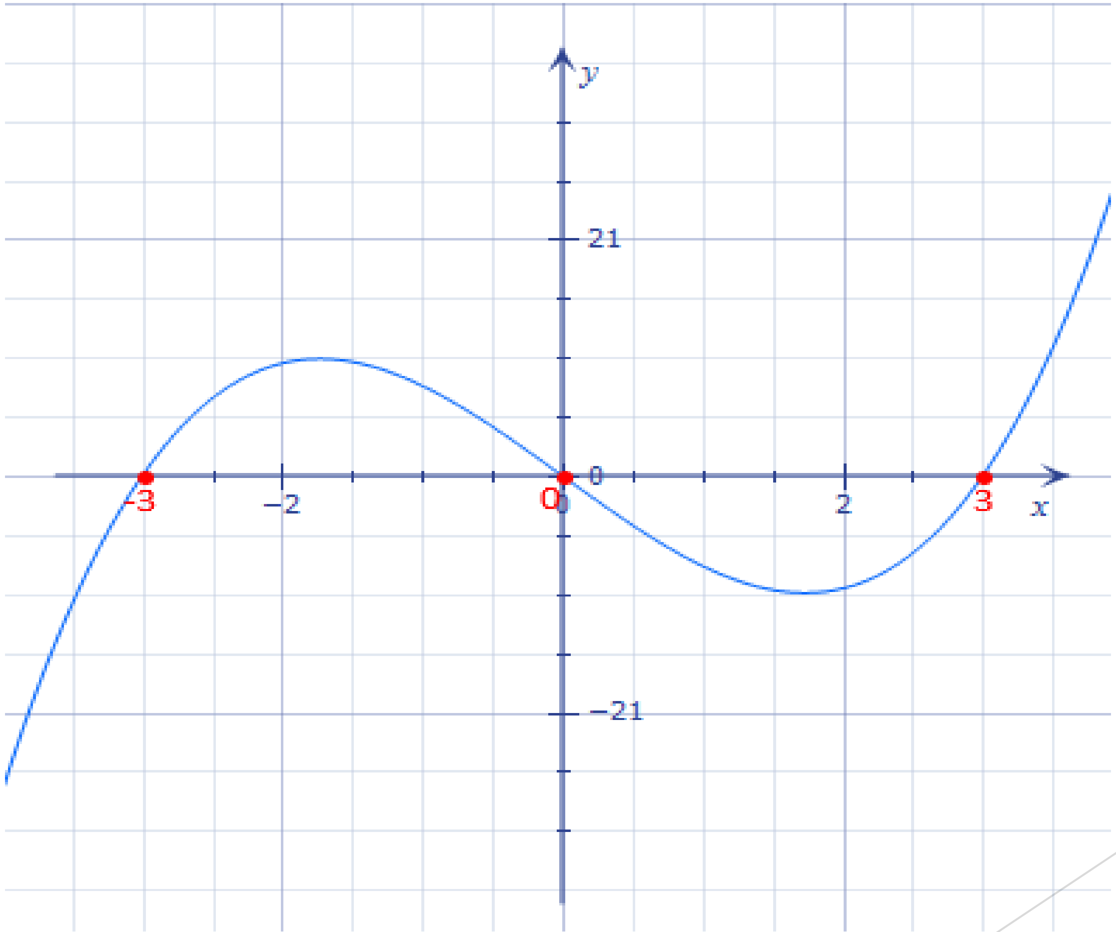
3*x-5=0 => 3*x=-5 => x=-5\3

- Приклад 2. $y=x^3-9*x$

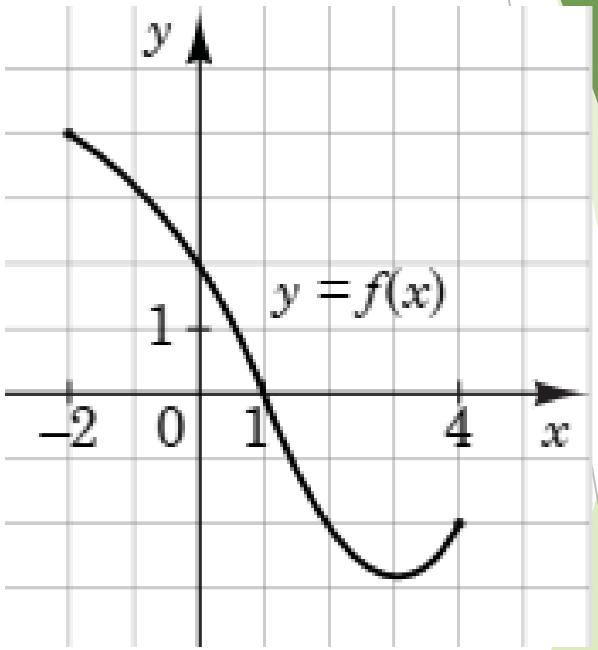
$x^3-9*x=0$ => $x*(x^2-9)=0$ => $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 9; \ x = \pm 3 \end{cases}$ => $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \ \ x_3 = -3 \end{cases}$

Нулі функції

- Щоб знайти нулі функції, заданої графіком, вказати координату х точок, в яких цей графік перетинає вісь Ох.
- Наприклад, для функції $y=x^3-9*x$



- На рисунку зображено графік функції y=f(x), визначеної на проміжку [-2;4]. Укажіть нуль цієї функції.
- Нулями функції є точки перетину графіка функції осі Ох. За малюнком маємо одну точку перетину осі Ох в точці x=1.



Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

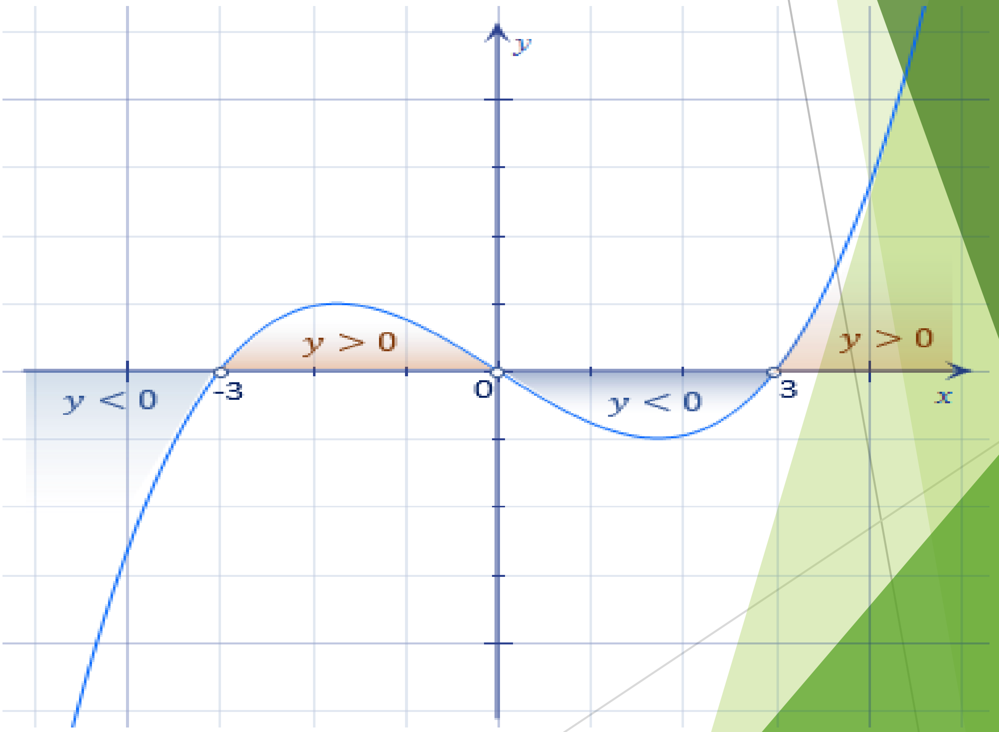
Проміжки знакосталості і корені функцій

Проміжками знакосталості функції називають проміжки області визначення, на яких функція зберігає свій знак (тобто залишається додатною або від’ємною).

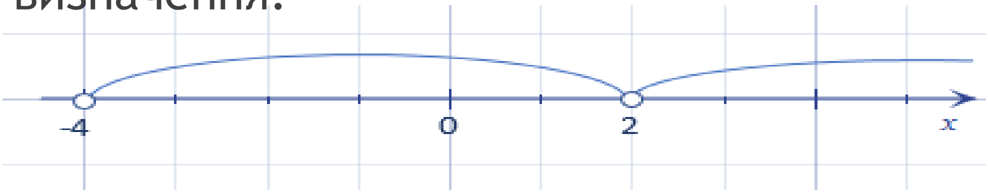
Наприклад, на рисунку маємо чотири проміжки знакосталості.

Проміжки знакосталості для аналітично заданої функції зручно знаходити методом інтервалів.

- Знаходимо область визначення функції.
- Знаходимо нулі функції.
- На числовій прямій позначаємо область визначення функції, її нулі і точки, у яких функція не визначена.
- Знаходимо знак функції на кожному із отриманих проміжків області визначення.



- **Наприклад.** Знайти проміжки знакосталості функції $y = \frac{3*x-6}{\sqrt{4+x}}$
- Область визначення функції: 4+x>0, x>-4 => D(y)=(-4; +∞)
- Нулі функції y=0: $y = \frac{3*x-6}{\sqrt{4+x}} = 0 => 3*x-6=0 => 3*x=6 => x=2$
- Покажемо на числовій прямій проміжки, на які точка x=2 розбиває область визначення.



- Це і є проміжки знакосталості нашої функції. (-4; 2) і (2; +∞).
- Визначимо, яких знаків набуває на цих проміжках функція.
- З першого проміжку (-4; 2) обираємо довільне значення, нехай 0 і відставимо у функцію

$y(0) = \frac{3*x-6}{\sqrt{4+x}} = \frac{-6}{2} = -3,$ y(0)<0, тому знак буде від'ємним,

- на проміжку (2; +∞) візьмемо 5, $y(5) = \frac{3*x-6}{\sqrt{4+x}} = \frac{9}{3} = 3,$ y(5)>0 Отримали додатнє значення.

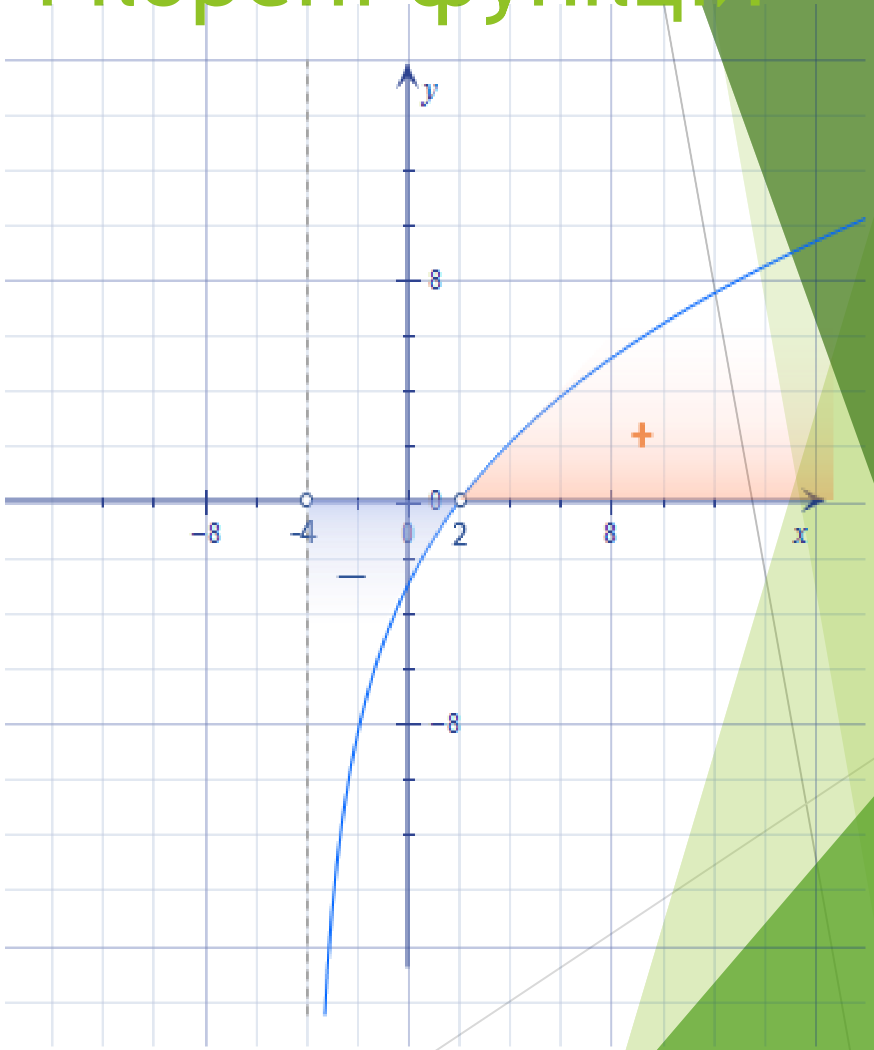
Проміжки знакосталості і корені функцій

Якщо функцію задано її графіком, або цей графік легко побудувати, то проміжки знакосталості знаходимо так:

- На осі Ох ми вже маємо і область визначення, і нулі функції. Ними вісь поділена на проміжки знакосталості.
- Якщо на проміжку графік функції розміщений **нижче осі Ох**, то функція **від'ємна**.
- Якщо на проміжку знакосталості графік розміщений **вище осі Ох**, то функція **додатна**.
- Записати відповідь

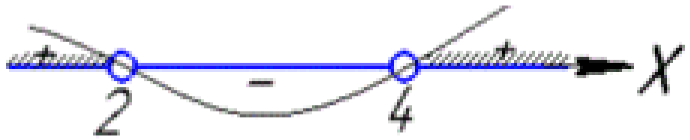
Проміжки знакосталості і корені функцій

- Спробуємо використати цю схему до функції із попереднього прикладу, але вже з побудованим графіком в умові задачі.
- Роздивимось уважно графік даної функції. З нього видно, що область визначення D(y)=(−4; +∞).
- Графік перетинає вісь Ox в точці 2 (нуль функції). Ця точка розбила область визначення на проміжки (−4; 2) і (2; +∞).
- На першому із вказаних проміжків графік проходить нижче осі абсцис ("іксів").
- На рисунку це показано блакитним. Тут функція має знак "мінус".



Знайти область визначення функції $y=lg(x^2-6x+8)$

Звідси маємо умову для визначення ОДЗ: $x^2-6x+8>0$,
$(x-2)(x-4)>0$,
$(x-2)(x-4)=0$,
Два знайдені нулі $x=2$, $x=4$ наносимо на числову вісь і встановлюємо знаки на проміжках.



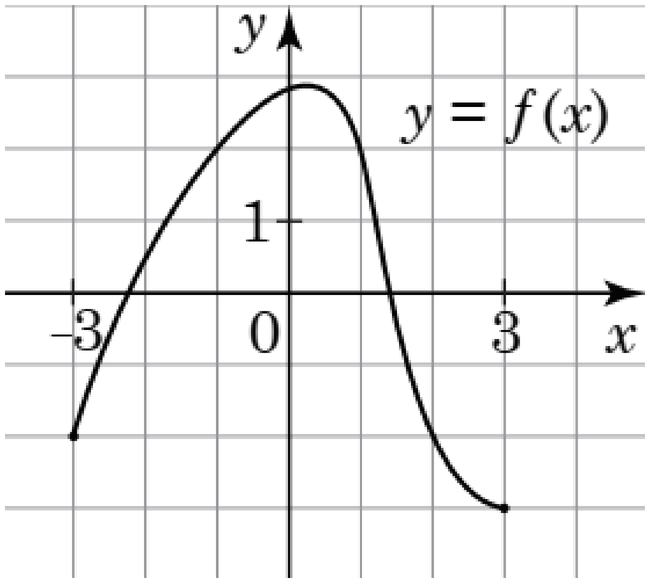
Областю визначення заданого логарифма є два інтервали $x\in(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$, що відповідають варіанту В тестів.

Областю значень функції $y=f(x)$ є проміжок $[-2;2]$. Знайти область значень функції $y=4f(x)-3$.

- Будьте уважними та прослідкуйте як змінюється область визначення та область значень при геометричних перетвореннях графіків функцій.
  Оскільки функцію $y=4f(x)-3$ отримують з функції $y=f(x)$ розтягом останньої у 4 рази до осі Ox та зсуненням на 3 одиниці вниз (відносно осі Oy), то запишемо як мінятиметься область значень при цьому
- $-2 \le f(x) \le 2$,
  $-2 \cdot 4 \le 4 \cdot f(x) \le 2 \cdot 4$, тобто $-8 \le 4 \cdot f(x) \le 8$,
  $-8-3 \le 4 \cdot f(x)-3 \le 8-3$, тобто $-11 \le 4 \cdot f(x)-3 \le 5$.
- Знайшли $E(y)=[-11;5]$ - область значень функції $y=4f(x)-3$.
- Відповідь: [-11;5] .

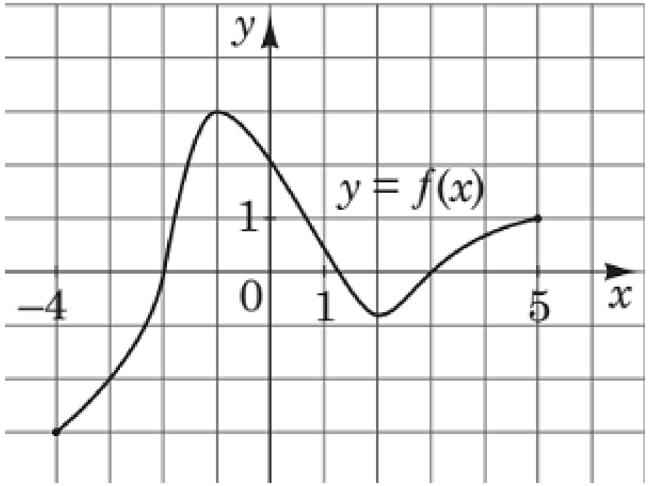
На рисунку зображено графік функції y=f(x), визначеної на відрізку [-3;3]. Одна з наведених точок, абсциса якої є від’ємним числом, а ордината — додатним, належить цьому графіку. Укажіть цю точку.

А	Б	В	Г	Д
(2;-2)	(-1;2)	(-3;-2)	(-2;2)	(1;2)



- Так як абсциса є від'ємним числом, а ордината додатним, то шукаємо точку з першим від'ємним числом і другим додатним. Це або Б, або Г. З цих двох точок на графіку лежить лише (-1;2).

На рисунку зображено графік функції y=f(x), визначеної на проміжку [-4;5]. Точка (x_0;-2) належить графіку цієї функції. Визначте абсцису x_0 цієї точки.



А	Б	В	Г	Д
3	2	0	-2	-3

- Нам потрібно знайти точку на графіку, у якої ордината дорівнює -2. Це точка з координатами (-3;-2).

ХПІ підготовка

Онлайн сервіс НТУ "ХПІ" для вибору спеціальності, тренування до тестів та успішного вступу в університети.

http://training.kpi.kharkov.ua/